**Tema 2.1. Variables Aleatorias Discretas.**

**Motivación del tema.** Considere un sistema de agua que fluye a través de unas válvulas de a . Las válvulas A,B,C funcionan independiente.

A

B C

Cada válvula se abre correctamente mediante una señal con una probabilidad de 0.8. A este problema le podemos asociar un espacio muestral cuyos elementos corresponden a las formas en que están colocadas las válvulas. Podemos obtener los elementos de con un diagrama de árbol como sigue:

Así el espacio muestral está formado por los ocho caminos:

Por ejemplo, la expresión significa que las válvulas A y B están cerradas y está abierta y por lo tanto el agua no puede fluir de a . Una variable aleatoria

, leasé de en

es una regla mediante la cual a cada elemento de le asociamos un número real, por ejemplo, y la interpretación de esta asignación es que con hay 0 caminos abiertos. Otro ejemplo de un elemento de es , y , ¿por qué?

Utilizamos la notación , para indicar todas las formas posibles en que pueden estar las válvulas para que no fluya agua de a o como todos los elementos del espacio muestral que al aplicarles la variable aleatoria van a dar a 0, entonces

¿Podría usted obtener y ?

**Ejercicios.**

1. Encontrar .

**Definición** 1. Sea ó un espacio muestral finito o infinito contable. Una variable aleatoria

es una función del espacio muestral en el conjunto ℝ de números reales. es el valor de bajo la variable aleatoria . Se puede representar mediante una tabla:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Espacio Muestral |  |  |  |
| Imagen o Recorrido |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Espacio Muestral |  |  |  |  |
| Imagen o Recorrido |  |  |  |  |

s

**Definición 2.** La notación será utilizada para designar la imagen o recorrido de una variable aleatoria , es decir,

.

**Definición 3**. Una variable aleatoria es discreta si su imagen es:

Finita: , Infinito Contable:

**Ejemplo 1.** Se lanza un par de dados equilibrados. El espacio muestral S es

Definimos una variable aleatoria

,

Calcule y . Obtenga el recorrido .

**Solución.** Por la definición de

Los 36 elementos de al aplicarles se transforman en los números del 1 al 6. Por tanto, el recorrido R de X es

1 2 3 4 5 6

**Ejemplo 2.** Definamos otra variable aleatoria

Calcular y . También obtener la imagen de .

**Solución.** Por la definición de

El espacio muestral, en este caso, es transformado por la variable aleatoria en los números que están entre 2 y 12. Por tanto, el recorrido , de Y es:

**Ejemplo 3.**

1. Una caja contiene 12 artículos de los cuales 3 son defectuosos. Se selecciona una muestra de 3 artículos de la caja. El espacio muestral S conformado por las muestras diferentes de tamaño 3, Sea la variable aleatoria que cuenta el número de artículos defectuosos, en la muestra; entonces X es una variable aleatoria con recorrido
2. Se lanza una moneda hasta que sale cara. El espacio muestral es el siguiente

Sea X el número de veces que se lanza la moneda. Entonces, X es una variable aleatoria con recorrido

(Se incluye el número para el caso en que solo ocurre sello). Aquí X es una variable aleatoria infinita contable.

**Ejercicios.**

1. Se lanza un par de dados equilibrados. Definimos una variable aleatoria

.

Calcule y . Obtenga el recorrido .

**Respuesta:** (a) 0,-1,3,0, (b) .

1. Se lanza una moneda y un dado equilibrados. Definimos una variable aleatoria

.

1. Calcular , (b) ¿cuál es el espacio muestral?, (c) ¿cuál es el rango?

**Respuesta:** (a) 4, 6, (b) , (c) .

1. Se selecciona un ficha de domino al azar, (a) ¿cuál es el espacio muestral ?, (b) definimos una variable aleatoria como el número de puntos en la ficha, ¿cuál es el rango?

**Definición 4. Eventos Definidos con Desigualdades.** Se utilizan las notaciones y para designar a los eventos:

* está formado por todos los elementos en el espacio muestral que bajo la variable aleatoria van a dar a o
* está formado por todos los elementos en el espacio muestral que bajo la variable aleatoria están en el intervalo o

En forma análoga se definen los eventos

**Ejemplo 4.** Calcular , y , para la variable aleatoria del ejemplo 1   
. También calcular sus probabilidades, es decir, , y .

**Solución.** Para buscamos todas las parejas en las que el máximo sea 5, estas son:

y

Mientras que para , se buscan las parejas cuyo máximo esté entre 2 y 3, estas son:

y

Observe que el evento es el conjunto vació, pues no hay en el espacio muestral alguna pareja que vaya a dar a -10 bajo la variable aleatoria . Por lo tanto .

**Ejercicios.**

1. Calcular (a) , y , para la variable aleatoria del ejemplo 2   
   . (b) También calcular sus probabilidades, es decir, , y .

**Respuestas**: (a) , ,

1. Se lanza un par de dados equilibrados. Definimos una variable aleatoria

.

Calcular (a) , y . (b)También calcular sus probabilidades.

**Respuesta:**

**Definición 5. Función de Densidad o Masa de Probabilidad.** Sea una variable aleatoria. Definimos la función de densidad o masa de probabilidad , o también escrita como , como

**Observación 1.** Para obtener la función de densidad se siguen los siguientes pasos

* marcar en el eje X los puntos del recorrido y dibujar los puntos

* Si entonces la función de densidad vale 0
* Podemos escribir la función de densidad como una función seccionada

o también por medio de la tabla

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**Teorema 1. Propiedades de la Función de Densidad.** Sea una variable aleatoria con función de densidad entonces

1. La probabilidad de que la variable aleatoria tome valores en el intervalo , , es igual a la suma de los valores de la función de densidad en los puntos que están en el intervalo .

**Ejemplo 5.** Se lanza una moneda donde y . El espacio muestral es . Definimos la variable aleatoria por y . (a) Obtenga la función de densidad de la variable aleatoria., (b) calcule , con la propiedad 3 del teorema 1.

**Solución. (a)**El recorrido de la variable aleatoria es entonces

En cualquier otro punto la función de densidad vale cero. La tabla asociada a la función de densidad es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Y su gráfica es

1. Aplicando la propiedad 3 del teorema 1 tenemos

**Ejemplo 6.** Se lanza un dado normal con espacio muestral . Definimos una variable aleatoria como . (a) Obtenga el recorrido de la variable aleatoria y su función de densidad, (b) con la propiedad 3 calcular .

**Solución. (a)** El recorrido de la variable aleatoria es y la función de densidad está definida por:

Porque, por ejemplo, . La tabla asociada a la función de densidad es

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Y la gráfica de la función de densidad es

Para (b) aplicamos la propiedad 3 del teorema 1

**Ejemplo 7. (a)** Obtenga y dibuje la función de densidad de la variable aleatoria del ejemplo 1. (b) calcule la probabilidad con la propiedad 3 del teorema 1.

**Solución.** Sabemos que el recorrido de la va es y

Como en el numerador van quedando números impares desde 1 hasta 11 entonces la función de densidad está definida por

Y escrita como una tabla es

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Su gráfica es:

Para (b) tenemos, por la propiedad 3 del teorema 1

**Ejemplo 8.** La función de densidad de una variable aleatoria discreta está dada por la tabla

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

(a)Encuentre el valor de para que la tabla corresponda a una función de densidad, (b) calcular la probabilidad .

**Solución.** (a) Debemos resolver la ecuación

cuyas raíces son:

Desechamos la segunda raíz porque se hace negativo. Entonces la tabla nos queda como:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Para (b) la probabilidad se calcula utilizando la propiedad 3 del teorema 1

**Ejemplo 9.** Un envió de 5 automóviles tiene 2 con pequeñas fallas en la pintura. Si una agencia recibe en forma aleatoria 3 de estos automóviles, obtenga (a) la función de densidad de la variable aleatoria que cuenta el número de automóviles con fallas que recibe la agencia, (b) la probabilidad de que la agencia reciba por lo menos 1 automóvil con fallas.

**Solución. (a)** Los valores de la variable aleatoria son . Las probabilidades de estos valores son:

Así la función de densidad es

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Para (b) buscamos la probabilidad

**Ejercicios.**

1. Suponga que una tienda de abarrotes vende envases de leche descremada. Sea la variable aleatoria correspondiente al número de envases que se venden y la función de densidad de es:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 1/15 | 2/15 | 2/15 | 3/15 | 4/15 | 3/15 |

1. Demuestre que la suma de los números del segundo renglón da 1, (b) calcule , .

Respuesta: (a) demuestre que , (b) 9/15, 7/15.

1. Sea la variable aleatoria que da el número de ases en una extracción al azar de 4 cartas de una baraja ordinaria de 52 cartas. (a) construya la función de densidad de , (b) calcular .

**Respuestas:** (a)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  |  |  |  |  |  |

1. 263764/270725
2. La función de densidad de una variable aleatoria es

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |

1. Encuentre c, (b) calcular .

**Respuestas:** (a) .

1. La función de densidad de una variable aleatoria es
2. Compruebe que es una función de densidad, (b) calcular

**Respuestas:** (a) compruebe que , (b)

**Definición 6. Función de Distribución Acumulada.** Sea una variable aleatoria con recorrido . La función de distribución acumulada de la variable aleatoria es la función definida por

**Observación 2.** Para obtener la función de distribución acumulada de una variable aleatoria cuya imagen es se siguen los siguientes pasos

* Tener la función de densidad de la variable aleatoria

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

* Localizar en el eje X los puntos .
* Antes de ( en el intervalo )la función está formada por un escalón de altura 0.
* Después de ( en el intervalo ) la función está formada por un escalón de altura 1,
* La función de distribución acumulada está formada por escalones que van subiendo.
* En el intervalo la altura del escalón es , donde es la función de densidad.
* Para el intervalo la altura del escalón es .
* Para el intervalo la altura del escalón es .

**Teorema 2. Propiedades de la Función de Distribución Acumulada.** Sea la función de distribución acumulada de una variable aleatoria entonces

1. es creciente
2. Cálculo de probabilidades con la función de distribución acumulada. Sea un intervalo entonces

Tamaño del salto

**Ejemplo 9.** Se lanza una moneda. Construya la gráfica de la función de distribución acumulada de la variable aleatoria definida por y . Además y .

**Solución.** El rango es y la función de densidad es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | -1 | 1 |
|  | 0.8 | 0.2 |

-1 1

Los puntos en determinan cuántos escalones debemos formar. En este caso debemos hacer 3 escalones en los intervalos y

Antes de -1 la función está formada por un escalón de altura 0 y después de 1 está formada por un escalón de altura 1.

Para el intervalo la función está formada por un escalón de altura 0.8. En la tabla póngase entre -1 y 1 y sume los números que están en el segundo renglón y a la izquierda. Así que la función de distribución acumulada está definida por

**Ejemplo 10.** Construya la gráfica de la función de distribución acumulada de la variable aleatoria del ejemplo 6, .

**Solución.** Como el rango de la variable aleatoria es , entonces antes de 2 hay un escalón de altura cero y después de 7 hay un escalón den altura 1.

* En el intervalo hay un escalón de altura
* En el intervalo hay un escalón de altura
* En el intervalo hay un escalón de altura
* En el intervalo hay un escalón de altura
* En el intervalo hay un escalón de altura .

Así que la función de distribución acumulada está definida como:

**Ejemplo 11.** Obtenga la función de distribución acumulada de la variable aleatoria del ejemplo 7, .

**Solución.** Aprovechando lo que se hizo en el ejemplo 7 podemos escribir la función de distribución acumulada como

Su gráfica es:

**Ejercicios.**

1. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria es

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |
|  | 2p | p | 4p |

1. Encuentre la función de distribución acumulada, (b) con la función de distribución acumulada calcular , (c) hacer lo mismo que en (b), pero con la función de densidad.

**Respuestas:** (a)

1. 5/7
2. Una firma de inversiones ofrece a sus clientes bonos municipales que vencen después de diferente número años. Dado que la distribución acumulada de , el número de años para el vencimiento de un bono seleccionado aleatoriamente, es

Encuentre (a) la función de densidad, (b) , (c), (d) .

**Respuestas:** (a)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 3 | 5 | 7 |
|  | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4 |

1. ¼, (c) ½, (d) ½
2. La función de densidad de una variable aleatoria discreta es

Encuentre la función de distribución acumulada.

**Respuesta:**

1. Sea una variable aleatoria con función de distribución acumulada , demuestre que para enteros y (a) , (b) .

Ayuda: , hacer lo mismo con y simplificar. Hacer algo similar con (b)

1. El número de defectos en un automóvil es una variable aleatoria cuya función de distribución acumulada es

Calcule las siguientes probabilidades directamente de (a) , (b) , (c) , (d) .

Respuesta: (a) 0.29, (b)